

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
цифровых технологий

 / Кургалин С.Д.

05.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.08 Математические методы в современных информационных технологиях

1. Код и наименование направления подготовки:

09.04.02 Информационные системы и технологии

2. Профиль подготовки:

анализ и синтез информационных систем;
информационные технологии в менеджменте;
мобильные приложения и компьютерные игры;
системы прикладного искусственного интеллекта

3. Квалификация выпускника: магистр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

цифровых технологий

6. Составители программы:

Лобода Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор
кафедры цифровых технологий

7. Рекомендована: НМС факультета компьютерных наук (05.03.2025 г., протокол № 5)

8. Учебный год: 2025-2026

Семестр: 1

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целью изучения дисциплины является выработка у студентов понимания практических взаимосвязей математики и современных информационных технологий.

Основными задачами изучения дисциплины являются: закрепление у студентов теоретических знаний в области применения математических моделей в задачах обработки информации и навыков применения информационных технологий для исследования проблем современной математики. В задачи курса входит также знакомство с современным уровнем математики и информатики, с их решенными классическими задачами и нерешенными проблемами и гипотезами.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП

Учебная дисциплина относится к обязательной части блока Б1. Для успешного освоения дисциплины обучающиеся должны обладать глубокими знаниями в области математического анализа, дискретной математики, алгебры, аналитической геометрии.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте	ОПК-1.1	Знает математические, естественнонаучные и социально-экономические методы для использования в профессиональной деятельности	Знать: базовые концепции математики, актуальные для моделирования процессов в инженерии и IT-технологиях.
		ОПК-1.2	Умеет решать нестандартные профессиональные задачи, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте, с применением математических, естественнонаучных, социально-экономических и профессиональных знаний	Уметь: выбирать, применять и модифицировать математические методы для решения задач профессиональной деятельности.
		ОПК-1.3	Имеет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте	Владеть: математическим аппаратом для решения специфических задач в области информационных технологий
ОПК-3	Способен анализировать профессиональную	ОПК-3.1	Знает принципы, методы и средства анализа и	Знать: основные математические методы анализа и моделирования,

	информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями		структурирования профессиональной информации	принципы системного и статистического анализа, современные информационные технологии и инструменты для обработки и визуализации данных.
		ОПК-3.2	Умеет анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров	Уметь: пользоваться методами научного поиска и интеллектуального анализа математической информации при решении новых задач
		ОПК-3.3	Имеет навыки подготовки научных докладов, публикаций и аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями	Владеть: навыками представления и доказательства результатов, полученных с использованием математических методов
ОПК-7	Способен разрабатывать и применять математические модели процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений	ОПК-7.1	Знает принципы построения математических моделей процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений	Знать: фундаментальные и прикладные математические методы, теорию и принципы построения математических моделей
		ОПК-7.2	Умеет разрабатывать и применять математические модели процессов и объектов при решении задач анализа и синтеза распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений	Уметь: формализовать реальные процессы и объекты в виде математических моделей с учетом специфики информационных технологий.
		ОПК-7.3	Имеет навыки построения математически моделей для реализации успешного функционирования распределенных информационных систем и систем поддержки принятия решений	Владеть: навыками использования программных пакетов и языков программирования для реализации и анализа математических моделей и алгоритмов.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 5/180.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По сессиям
			Семестр 1
Аудиторные занятия		54	54
в том числе:	лекции	18	18
	практические	—	—
	лабораторные	36	36
Самостоятельная работа		90	90
Экзамен		36	36
Итого:		180	180

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Цифровая обработка аудио- и видео-информации.	Интерполяция и аппроксимация функций. Амплитудные и частотные характеристики сигналов. Применение основных идей теории рядов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
1.2	Использование интегральных преобразований в задачах обработки информации.	Преобразования Фурье, Лапласа, Радона, вэйвлет (всплесковые) преобразования. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрое преобразование Фурье (БПФ).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
1.3	Полиномиальные конструкции в задачах интерполяции и аппроксимации функций.	Теоремы Лагранжа и Вейерштрасса. Использование систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и других методов линейной алгебры в задачах обработки информации.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
1.4	Функции и полиномы дискретных переменных.	Двоичные (булевские) функции и функции k -значной логики. Полиномиальные представления функций дискретных переменных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
1.5	Суперпозиции функций.	Задачи о сложности представления функций дискретных и непрерывных переменных с использованием суперпозиций. Проблема (Гильберта) о суперпозициях в непрерывной математике. Элементы нечеткой логики.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
2. Лабораторные занятия			
2.1	Цифровая обработка аудио- и видео-информации.	Интерполяция и аппроксимация функций. Амплитудные и частотные характеристики сигналов. Применение основных идей теории рядов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
2.2	Использование интегральных преобразований в задачах обработки информации.	Преобразования Фурье, Лапласа, Радона, вэйвлет (всплесковые) преобразования. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрое преобразование Фурье (БПФ).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
2.3	Полиномиальные конструкции в задачах интерполяции и аппроксимации функций.	Теоремы Лагранжа и Вейерштрасса. Использование систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и других методов линейной алгебры в задачах обработки информации.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
2.4	Функции и полиномы дискретных переменных.	Двоичные (булевские) функции и функции k -значной логики. Полиномиальные представления функций дискретных переменных.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992
2.5	Суперпозиции функций.	Задачи о сложности представления функций дискретных и непрерывных переменных с использованием суперпозиций. Проблема (Гильберта) о суперпозициях в непрерывной математике. Элементы нечеткой логики.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11992

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Цифровая обработка аудио- и видео-информации.	4		8	20	32
2	Использование интегральных преобразований в задачах обработки информации.	2		4	16	22
3	Полиномиальные конструкции в задачах интерполяции и аппроксимации функций.	4		8	16	28
4	Функции и полиномы дискретных переменных.	4		8	20	32
5	Суперпозиции функций.	4		8	18	30
	Итого:	18		36	90	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических (или лабораторных) заданий в объеме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины. Лекционные занятия формируют базу для практических (или лабораторных) занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических (лабораторных) занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, презентационным материалом (при наличии) и конспектов практических (лабораторных) занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Больше количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Рыбин, С. В. Дискретная математика и информатика : учебник для вузов / С. В. Рыбин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 748 с. — ISBN 978-5-8114-8566-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/193326
2	Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507-49866-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/451232
3	Кусайкин, Д. В. Методы восстановления дискретных сигналов. Основы теории, программные инструменты, анализ точности : учебное пособие для вузов / Д. В. Кусайкин, С. В. Поршнев, Н. Т. Сафиуллин. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 388 с. — ISBN 978-5-8114-6411-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159483
4	Березкин, Е. Ф. Основы теории информации и кодирования : учебное пособие для вузов / Е. Ф. Березкин. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 320 с. — ISBN 978-5-507-50792-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/465089
5	Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 26-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 432 с. — ISBN 978-5-507-52215-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/440306
6	Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры : учебник / А. И. Мальцев. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-1009-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210299
7	Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / П. С. Александров. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 512 с. — ISBN 978-5-507-52355-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/448691
8	Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 736 с. — ISBN 978-5-8114-0317-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210368

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум / Я. М. Ерусалимский. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 476 с. — ISBN 978-5-507-46767-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/319427
2	Вейвлет-анализ в примерах : учебное пособие / О. В. Нагорнов, В. Г. Никитаев, В. М. Простокишин, С. А. Тюфлин. — Москва : НИЯУ МИФИ, 2010. — 120 с. — ISBN 978-5-7262-1387-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/75859
3	Карманов, И. В. Вейвлет-обработка сигналов и изображений в среде MATLAB : учебное пособие / И. В. Карманов. — Казань : КНИТУ-КАИ, 2024. — 280 с. — ISBN 978-5-7579-2728-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/453296
4	Марле в примерах и задачах : учебное пособие / составители О. Г. Корольков [и др.]. — Воронеж : ВГУ, 2011. — 132 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/357488

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Лань": https://e.lanbook.com/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Рыбин, С. В. Дискретная математика и информатика : учебник для вузов / С. В. Рыбин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 748 с. — ISBN 978-5-8114-8566-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/193326
2	Кусайкин, Д. В. Методы восстановления дискретных сигналов. Основы теории, программные инструменты, анализ точности : учебное пособие для вузов / Д. В. Кусайкин, С. В. Поршнев, Н. Т. Сафиуллин. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 388 с. — ISBN 978-5-8114-6411-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159483

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Компьютерный класс: специализированная мебель, персональные компьютеры с выходом в сеть «Интернет», мультимедийный проектор, экран. Программное обеспечение: ОС Windows или Linux, LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер, IDE PyCharm, редактор Jupiter.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Оценочные средства
1	Раздел 1	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.3	Лабораторная работа № 1
2	Раздел 2	ОПК-1 ОПК-7	ОПК-1.2 ОПК-7.1	Лабораторная работа № 2
3	Раздел 3	ОПК-1 ОПК-7	ОПК-1.3 ОПК-7.3	Лабораторная работа № 3
4	Раздел 4	ОПК-1 ОПК-7	ОПК-1.1 ОПК-7.2	Лабораторная работа № 4
5	Раздел 5	ОПК-1 ОПК-3	ОПК-1.2 ОПК-3.1 ОПК-3.2 ОПК-3.3	Лабораторная работа № 5
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Комплект КИМ Комплект тестовых заданий

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль текущей успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью лабораторных работ. За семестр по дисциплине предусмотрены две текущие аттестации.

Методика проведения и критерии оценивания текущих аттестаций

Лабораторные работы № 1, 2, 3 относятся к первой текущей аттестации, лабораторные работы № 4, 5 относятся ко второй текущей аттестации. Выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы. Отчёт о работе проводится в виде собеседования и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Для получения оценки «зачтено» за текущую аттестацию необходимо выполнить все относящиеся к данной аттестации лабораторные работы.

Лабораторная работа № 1

«Цифровая обработка аудио- и видео-информации»

Цель работы: ознакомление с принципами цифровой обработки сигналов.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы. Отчёт о работе проводится в виде собеседования и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: составить и реализовать программу оцифровки графика функции $y = \frac{1}{x+2} + \sin x + 3 \cos 2x$ на отрезке $[0,3]$ несколькими способами:

- а) по амплитуде;
- б) по коэффициентам тейлоровского ряда;
- в) по коэффициентам ряда Фурье.

Лабораторная работа № 2

«Использование интегральных преобразований в задачах обработки информации»

Цель работы: ознакомление с возможностями применения интегральных преобразований к задачам обработки информации.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы. Отчёт о работе проводится в виде собеседования

и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: построить дискретное преобразование Фурье функции, заданной в узлах дискретизации отрезка $[0,1]$ с шагом дискретизации $h = 0.1$.

Лабораторная работа № 3

«Полиномиальные конструкции в задачах интерполяции и аппроксимации функций»

Цель работы: ознакомление с применением полиномов для интерполяции и аппроксимации функций.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы. Отчёт о работе проводится в виде собеседования и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: построить для заданной на отрезке функции $f(x)$ приближающие ее многочлены несколькими способами:

- а) интерполяционный многочлен;
- б) полиномиальное МНК-приближение;
- в) многочлен Вейерштрасса равномерного приближения.

Лабораторная работа № 4

«Функции и полиномы дискретных переменных»

Цель работы: ознакомление с применениями функций дискретных переменных.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы. Отчёт о работе проводится в виде собеседования и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: построить (несколькими способами) многочлен по mod 5 от трех дискретных переменных, принимающий нетривиальные значения лишь в двух точках трехмерного куба.

Лабораторная работа № 5

«Суперпозиции функций»

Цель работы: ознакомление с задачей о сложности представления функций дискретных и непрерывных переменных с использованием суперпозиций.

Требования к выполнению работы: выполнение лабораторной работы предусматривает написание программы. Отчёт о работе проводится в виде собеседования и заключается в демонстрации работы программы, объяснении принципов работы алгоритма и ответов на дополнительные вопросы.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо показать высокий уровень владения теоретическим материалом, уметь объяснить принцип работы написанной программы, верно ответить на дополнительные вопросы.

Задание: построить описания заданных булевских функций от 5 переменных в разных базисах:

а) $\{x \& y, x\}$

б) $\{1, x \& y, x + y\}$.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: комплект КИМ, комплект тестовых заданий.

В случае, если обучающийся имеет оценку «не зачтено» хотя бы по одной из текущих аттестаций, максимальной оценкой за промежуточную аттестацию является оценка «удовлетворительно».

Описание технологии проведения

Обучающемуся случайным образом дается КИМ, содержащий 1 вопрос из перечня вопросов к экзамену, а также набор заданий из комплекта тестовых заданий. На выполнение работы отводится 2 академических часа.

Перечень вопросов к экзамену

1. Интерполяция и аппроксимация функций. Амплитудные и частотные характеристики сигналов. Применение основных идей теории рядов.
2. Преобразования Фурье, Лапласа, Радона, вэйвлет (всплесковые) преобразования. Дискретное преобразования Фурье (ДПФ) и быстрое преобразования Фурье (БПФ).

3. Теоремы Лагранжа и Вейерштрасса. Использование систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и других методов линейной алгебры в задачах обработки информации.
4. Двоичные (булевские) функции и функции k -значной логики. Полиномиальные представления функций дискретных переменных.
5. Задачи о сложности представления функций дискретных и непрерывных переменных с использованием суперпозиций. Проблема (Гильберта) о суперпозициях в непрерывной математике. Элементы нечеткой логики.

Комплект тестовых заданий

№	Задание	Варианты ответа	Верный ответ
1	При каком k из предложенного списка многочлены по модулю k не образуют полной системы функций?	а) 2 б) 3 в) 6 г) 13	в
2	Записать уравнение окружности $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ в переменных z и $\bar{z}$.	а) $2 z ^2 + (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 4 = 0$ б) $ z ^2 + (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} = 0$ в) $ z ^2 - (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0$ г) $ z-1+i ^2 - 1 = 0$	в
3	Преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ функции $f(t) = \sin 2t$ равно...	а) $\frac{1}{p^2+2}$ б) $\frac{p}{p^2+4}$ в) $\frac{2}{p^2+2}$ г) $\frac{2}{p^2+4}$	г
4	Преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ функции $1 + \cos t$ равно	а) $\frac{p^2+2}{p^2+1}$ б) $\frac{2p^2+1}{p(p^2+1)}$ в) $\frac{2p^2+1}{p^2+2}$ г) $\frac{p+1}{p(p^2+1)}$	б
5	Образом прямой $x = 1$ при отображении $w = z^2$ будет	а) Окружность б) Прямая в) Парабола г) Гипербола	в
6	Обратным отображением к дробно-линейному отображению $w = \frac{3z+2}{5z+1}$ является отображение...	а) $z = \frac{5w+1}{3w+2}$ б) $z = \frac{w-2}{-5w+3}$ в) $z = \frac{w-3}{-5w+2}$ г) $z = \frac{w+5}{2w-3}$	б
7	Вектор $(1, A, 1)^T$ является собственным вектором матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$ отвечающим нулевому собственному значению. Чему равно A ?	а) 1 б) 2 в) -2 г) i	в

8	Функция $y = \exp(-x^2/2)$ является собственной функцией преобразования Фурье $f(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) d x.$ Какому собственному значению отвечает эта функция?	а) -1 б) 1 в) $\sqrt{\pi}$ г) $\sqrt{2\pi}$	а
9	При каком k из предложенного списка многочлены по модулю k образуют полной системы функций?	а) 8 б) 9 в) 10 г) 11	г
10	Вычислить значение в точке $(1,2,3)$ функции $f(x, y, z) = x \cdot \bar{y} + y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{z}$ в 4-значной логике, имея в виду что операции сложения и умножения осуществляются по модулю 4, а $\bar{x} = x + 1(mod 4).$	а) 0 б) 1 в) 2 г) 3	б

Задания с кратким ответом

№	Задание	Верный ответ
1	Найти значение $P(5)$ для интерполяционного полинома $P(x)$, построенного по следующим данным: $P(1) = 5, P(2) = 4, P(3) = 3.$	1
2	Найти максимальное собственное значение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	5
3	В какой точке образ окружности $z = 3$ под действием отображения $w = \frac{1}{z - 3}$ пересекает ось абсцисс? (Ответ округлить до второго знака после запятой)	0.17
4	Вычислить значение в точке $(1,2,4)$ функции $f(x, y, z) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ в 6-значной логике, имея в виду что операции сложения и умножения осуществляются по модулю 6, а $\bar{x} = x + 1(mod 6)$.	2
5	Найти максимальное удаление (по вертикали) совокупности точек $A(1,2,10)$, $B(2,-1,4)$, $C(-3,1,21)$ от поверхности $z = x^2 - 2xy + 3y^2$.	3

Задания с развернутым ответом

Задание 1. Найти значение $P(4)$ для интерполяционного полинома $P(x)$, построенного по следующим данным:

$$P(1) = 4, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 2.$$

Решение. Используя базис Лагранжа, связанный с тремя узлами $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, искомым интерполяционный полином можно построить по формуле

$$P(x) = \sum_{k=1}^3 y_k E_k(x), \text{ где } E_1 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}, E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}, E_3 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)},$$

Вычисляя значения $E_1(4) =$, $E_2(4) =$, $E_3(4) =$, получаем

$$P(4) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 3 = \frac{23}{2}.$$

Задание 2. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ к жордановой нормальной форме (ЖНФ).

Решение. Составляя характеристический многочлен исходной матрицы A

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5),$$

находим ее характеристические (собственные) значения $\lambda = 1$, $\lambda_2 = 5$. Каждому из этих значений соответствует собственный вектор, определяемый формулами

$$(A - \lambda_1)X = 0, (A - \lambda_2)Y = 0.$$

Удобно взять в качестве собственных векторов $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Составим далее из этих векторов-столбцов матрицу $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Переход к ЖНФ матрицы A осуществляется за счет матричного подобия $A \rightarrow S^{-1}AS$. Тогда исходная матрица A превращается в диагональную матрицу

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

которая и является искомой ЖНФ.

Задание 3. Используя информацию о собственных векторах $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и собственных значениях $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) $AY' = Y$, где $Y = Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ неизвестная вектор-функция из двух компонент, а штрих означает дифференцирование по времени.

Решение. Перейдем от неизвестной вектор-функции $Y = Y(t)$ к новой функции $Z = Z(t)$, определяемой соотношениями $Y = CZ$ или $Z = C^{-1}Y$ с неизвестной пока невырожденной матрицей C с постоянными коэффициентами. Тогда исходное матричное ОДУ можно записать в виде $A(CZ)' = CZ$ или, после умножения этого уравнения слева на матрицу C^{-1} , как

$$(C^{-1}AC)Z' = Z.$$

Теперь ясно, что в качестве C удобно взять матрицу $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, составленную из собственных векторов матрицы A , т.к. для нее произведение $S^{-1}AS$ представляет собой диагональную матрицу. Конкретно получаем

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что вместо исходной системы мы получаем два уравнения относительно разделенных неизвестных функций

$$z_1'(t) = z_1(t), \quad 5z_2'(t) = z_2(t).$$

Решениями таких линейных уравнений, как известно, являются экспоненты, т. что

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{t/5} \end{pmatrix}, \text{ а } Y = Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} Z(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{t/5} \\ -C_1 e^t + 3C_2 e^{t/5} \end{pmatrix}.$$

Задание 4. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), имеющую в матричной форме вид $AY' = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – неизвестная вектор-функция из двух компонент, а штрих означает дифференцирование по времени.

Решение. Заметим, что матрица не вырождена, т.к. ее определитель равен $-1 \neq 0$, а потому она имеет обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Умножая начальное матричное уравнение $AY' = B$ слева на матрицу A^{-1} получим эквивалентное исходному новое матричное уравнение $A^{-1}AY' = A^{-1}B$ или

$$Y' = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2\sin t \\ 3 - \sin t \end{pmatrix}$$

Отсюда интегрированием находим

$$y_1(t) = -5t - 2\cos t + C_1, \quad y_2(t) = 3t + \cos t + C_2.$$

Задание 5. Найти образ начала координат под действием дробно-линейного отображения, переводящего тройку точек комплексной плоскости $(1, 2, 3)$ в тройку точек $(1, 2i, -3)$.

Решение. Дробно-линейное отображение, переводящее тройку начальных точек $(1, 2, 3)$ в тройку вспомогательных точек $(0, 1, \infty)$ задается формулой

$$\zeta = \frac{z-1}{z-3} \cdot \frac{2-3}{2-1} = -\frac{z-1}{z-3}.$$

Заметим, что под действием такого отображения начало координат исходной комплексной плоскости переходит в точку $-1/3$.

Аналогично строим дробно-линейное отображение, переводящее тройку конечных точек $(1, 2i, -3)$ в ту же вспомогательную тройку $(0, 1, \infty)$:

$$\zeta = \frac{w-1}{w+3} \cdot \frac{2i+3}{2i-1}.$$

Пользуясь взаимной однозначностью дробно-линейных отображений, теперь остается найти такое комплексное число w , при котором последнее произведение двух дробей равно $-1/3$. Имеем:

$$\frac{w-1}{w+3} \cdot \frac{2i+3}{2i-1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2i+3)(w-1) + (2i-1)(w+3) = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем

$$w(3(2i+3) + (2i-1)) + (3(2i-1) - 3(2i+3)) = 0. \text{ или } 8w(1+i) = 12.$$

В итоге искомая точка – это

$$w = \frac{12}{8(1+i)} = \frac{3}{2} \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{3}{4}(1-i).$$

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Примеры типовых контрольно-измерительных материалов

Контрольно-измерительный материал № 1

1. Классическое преобразование Фурье.
2. Ответьте на вопросы теста.

Контрольно-измерительный материал № 2

1. Теоремы Лагранжа и Вейерштрасса.
2. Ответьте на вопросы теста.

Требования к студентам при проведении промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Изложение материала не содержит ошибок, отличается последовательностью, грамотностью, логической стройностью.	Повышенный уровень	Отлично

Набрано не менее 80% от максимально возможного балла за тестовые задания.		
Дан развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Материал изложен в целом последовательно и грамотно, отсутствуют грубые ошибки, однако имеются отдельные неточности в определениях, вычислениях, доказательствах, изложениях положений теории. Набрано не менее 65% от максимально возможного балла за тестовые задания.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) содержит изложение только базового теоретического материала, имеются ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Нарушена логическая последовательность в изложении материала. Набрано не менее 50% от максимально возможного балла за тестовые задания.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) отсутствует, либо содержит грубые ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Обучающийся не владеет основными понятиями дисциплины. Отсутствует логическая последовательность в изложении материала. Набрано менее 50% от максимально возможного балла за тестовые задания.	—	Неудовлетворительно

Приведённые ниже задания рекомендуется использовать при проведении диагностических работ для оценки остаточных знаний по дисциплине

Задания с выбором ответа

№	Задание	Варианты ответа	Верный ответ
1	При каком k из предложенного списка многочлены по модулю k не образуют полной системы функций?	д) 2 е) 3 ж) 6 з) 13	в
2	Записать уравнение окружности $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ в переменных z и $\bar{z}$.	д) $2 z ^2 + (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 4 = 0$ е) $ z ^2 + (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} = 0$ ж) $ z ^2 - (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} - 2 = 0$ з) $ z - 1 + i ^2 - 1 = 0$	в
3	Преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ функции $f(t) = \sin 2t$ равно...	д) $\frac{1}{p^2+2}$ е) $\frac{p}{p^2+4}$ ж) $\frac{2}{p^2+2}$ з) $\frac{2}{p^2+4}$	г
4	Преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ функции $1 + \cos t$ равно	д) $\frac{p^2+2}{p^2+1}$ е) $\frac{2p^2+1}{p(p^2+1)}$ ж) $\frac{2p^2+1}{p^2+2}$	б

		з) $\frac{p+1}{p(p^2+1)}$	
5	Образом прямой $x = 1$ при отображении $w = z^2$ будет	д) Окружность е) Прямая ж) Парабола з) Гипербола	в
6	Обратным отображением к дробно-линейному отображению $w = \frac{3z + 2}{5z + 1}$ является отображение...	д) $z = \frac{5w+1}{3w+2}$ е) $z = \frac{-5w+3}{w-3}$ ж) $z = \frac{-5w+2}{w+5}$ з) $z = \frac{w+5}{2w-3}$	б
7	Вектор $(1, A, 1)^T$ является собственным вектором матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$ отвечающим нулевому собственному значению. Чему равно A ?	д) 1 е) 2 ж) -2 з) i	в
8	Функция $y = \exp(-x^2/2)$ является собственной функцией преобразования Фурье $f(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$ Какому собственному значению отвечает эта функция?	д) -1 е) 1 ж) $\sqrt{\pi}$ з) $\sqrt{2\pi}$	а
9	При каком k из предложенного списка многочлены по модулю k образуют полной системы функций?	д) 8 е) 9 ж) 10 з) 11	г
10	Вычислить значение в точке $(1,2,3)$ функции $f(x, y, z) = x \cdot \bar{y} + y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{z}$ в 4-значной логике, имея в виду что операции сложения и умножения осуществляются по модулю 4, а $\bar{x} = x + 1(mod 4).$	д) 0 е) 1 ж) 2 з) 3	б

Задания с кратким ответом

№	Задание	Верный ответ
1	Найти значение $P(5)$ для интерполяционного полинома $P(x)$, построенного по следующим данным: $P(1) = 5, P(2) = 4, P(3) = 3.$	1
2	Найти максимальное собственное значение матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	5
3	В какой точке образ окружности $ z = 3$ под действием отображения $w = \frac{1}{z - 3}$ пересекает ось абсцисс? (Ответ округлить до второго знака после запятой)	0.17
4	Вычислить значение в точке $(1,2,4)$ функции $f(x, y, z) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ в 6-значной логике, имея в виду что операции сложения и умножения осуществляются по модулю 6, а	2

	$\bar{x} = x + 1(\text{mod } 6).$	
5	Найти максимальное удаление (по вертикали) совокупности точек $A(1,2,10)$, $B(2,-1,4)$, $C(-3,1,21)$ от поверхности $z = x^2 - 2xy + 3y^2$.	3

Задания с развернутым ответом

Задание 1. Найти значение $P(4)$ для интерполяционного полинома $P(x)$, построенного по следующим данным:

$$P(1) = 4, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 2.$$

Решение. Используя базис Лагранжа, связанный с тремя узлами $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, искомым интерполяционный полином можно построить по формуле

$$P(x) = \sum_{k=1}^3 y_k E_k(x), \text{ где } E_1 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}, E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}, E_3 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)},$$

Вычисляя значения $E_1(4) =$, $E_2(4) =$, $E_3(4) =$, получаем

$$P(4) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 3 = \frac{23}{2}.$$

Задание 2. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ к жордановой нормальной форме (ЖНФ).

Решение. Составляя характеристический многочлен исходной матрицы A

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5),$$

находим ее характеристические (собственные) значения $\lambda = 1, \lambda_2 = 5$. Каждому из этих значений соответствует собственный вектор, определяемый формулами

$$(A - \lambda_1)X = 0, \quad (A - \lambda_2)Y = 0.$$

Удобно взять в качестве собственных векторов $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Составим далее из этих векторов-столбцов матрицу $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Переход к ЖНФ матрицы A осуществляется за счет матричного подобия $A \rightarrow S^{-1}AS$. Тогда исходная матрица A превращается в диагональную матрицу

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

которая и является искомой ЖНФ.

Задание 3. Используя информацию о собственных векторах $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и собственных значениях $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, решить систему обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ) $AY' = Y$, где $Y = Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ неизвестная вектор-функция из двух компонент, а штрих означает дифференцирование по времени.

Решение. Перейдем от неизвестной вектор-функции $Y = Y(t)$ к новой функции $Z = Z(t)$, определяемой соотношениями $Y = CZ$ или $Z = C^{-1}Y$ с неизвестной пока невырожденной матрицей C с постоянными коэффициентами. Тогда исходное матричное ОДУ можно записать в виде $A(CZ)' = CZ$ или, после умножения этого уравнения слева на матрицу C^{-1} , как

$$(C^{-1}AC)Z' = Z.$$

Теперь ясно, что в качестве C удобно взять матрицу $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, составленную из собственных векторов матрицы A , т.к. для нее произведение $S^{-1}AS$ представляет собой диагональную матрицу. Конкретно получаем

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что вместо исходной системы мы получаем два уравнения относительно разделенных неизвестных функций

$$z_1'(t) = z_1(t), \quad 5z_2'(t) = z_2(t).$$

Решениями таких линейных уравнений, как известно, являются экспоненты, т. что

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{t/5} \end{pmatrix}, \text{ а } Y = Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} Z(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{t/5} \\ -C_1 e^t + 3C_2 e^{t/5} \end{pmatrix}.$$

Задание 4. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), имеющую в матричной форме вид $AY' = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – неизвестная вектор-функция из двух компонент, а штрих означает дифференцирование по времени.

Решение. Заметим, что матрица не вырождена, т.к. ее определитель равен $-1 \neq 0$, а потому она имеет обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Умножая начальное матричное уравнение $AY' = B$ слева на матрицу A^{-1} получим эквивалентное исходному новое матричное уравнение $A^{-1}AY' = A^{-1}B$ или

$$Y' = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2\sin t \\ 3 - \sin t \end{pmatrix}$$

Отсюда интегрированием находим

$$y_1(t) = -5t - 2\cos t + C_1, \quad y_2(t) = 3t + \cos t + C_2.$$

Задание 5. Найти образ начала координат под действием дробно-линейного отображения, переводящего тройку точек комплексной плоскости $(1, 2, 3)$ в тройку точек $(1, 2i, -3)$.

Решение. Дробно-линейное отображение, переводящее тройку начальных точек $(1, 2, 3)$ в тройку вспомогательных точек $(0, 1, \infty)$ задается формулой

$$\zeta = \frac{z-1}{z-3} \cdot \frac{2-3}{2-1} = -\frac{z-1}{z-3}.$$

Заметим, что под действием такого отображения начало координат исходной комплексной плоскости переходит в точку $-1/3$.

Аналогично строим дробно-линейное отображение, переводящее тройку конечных точек $(1, 2i, -3)$ в ту же вспомогательную тройку $(0, 1, \infty)$:

$$\zeta = \frac{w-1}{w+3} \cdot \frac{2i+3}{2i-1}.$$

Пользуясь взаимной однозначностью дробно-линейных отображений, теперь остается найти такое комплексное число w , при котором последнее произведение двух дробей равно $-1/3$. Имеем:

$$\frac{w-1}{w+3} \cdot \frac{2i+3}{2i-1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2i+3)(w-1) + (2i-1)(w+3) = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем

$$w(3(2i+3) + (2i-1)) + (3(2i-1) - 3(2i+3)) = 0. \text{ или } 8w(1+i) = 12.$$

В итоге искомая точка – это

$$w = \frac{12}{8(1+i)} = \frac{3}{2} \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{3}{4}(1-i).$$

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0